Défis Première Spé maths : exponentielle Thiaude P.

Défi EXP 01 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x(e^x+8)=9$.**

Corrigé

On a les équivalences : $e^x(e^x+8)=9 \Leftrightarrow (e^x)^2+8e^x-9=0$

En posant $X=e^x$, cette équation s'écrit : $X^2+8X-9=0$.

X^2+8X-9 est de la forme aX^2+bX+c avec $a=1$, $b=8$ et $c=-9$,

de discriminant :$\Delta = b^2 = 4ac = 8^2-4(1)(-9)=64+36=100$.

$\Delta>0$ donc X^2+8X-9 admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8-\sqrt{100}}{2(1)}=\frac{-8-10}{2}=\frac{-18}{2}=-9$$

$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-8+\sqrt{100}}{2(1)}=\frac{-8+10}{2}=\frac{2}{2}=1$$

On a donc $X=-9$ ou $X=1$.

$X=-9$ ou	$X=1$
$e^x=-9$	$e^x=1$
Pour tout $a\in\mathbb{R}, e^x>0$	$\Leftrightarrow e^x=e^0$
donc l'équation $e^x=-9$	$\Leftrightarrow x=0$
n'a pas de solution réelle	

L'équation de départ admet pour unique solution : 0.

On peut aussi écrire : $S=\{0\}$.

Autre méthode

$$(e^x)^2+8e^x-9=0 \Leftrightarrow (e^x)^2+2(e^x)(4)+(4)^2-16-9=0$$
$$\Leftrightarrow (e^x+4)^2-25=0 \Leftrightarrow (e^x+4)^2-(5)^2=0$$
$$\Leftrightarrow (e^x+4+5)(e^x+4-5)=0 \Leftrightarrow (e^x+9)(e^x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow e^x+9=0 \;\; ou \;\; e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=-9 \;\; ou \;\; e^x=0 \;\; etc.$$

1	exp(x)*(exp(x)+8)=9
	Résoudre: $\{x=0\}$

Défi EXP 02 **Pour tout réel x, on pose :**

$$f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$$

Quelle est la valeur minimale de $f(x)$, pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?

Corrigé

f est quotient et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, à savoir $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}=e^x+e^{-x}$

Rappel : $(e^x)'=e^x$ et $(e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=e^x-e^{-x}$

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $e^x-e^{-x}>0$. On a les équivalences :

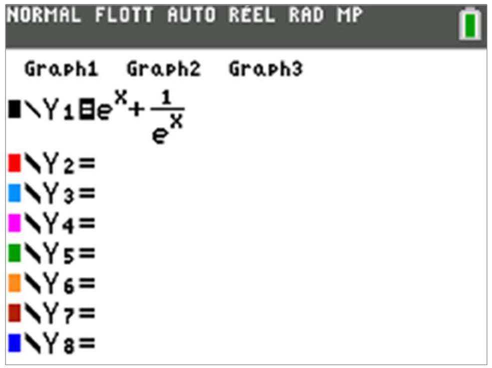
$$e^x-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^x>e^{-x} \Leftrightarrow x>-x \Leftrightarrow x+x>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>\frac{0}{2}$$
$$\Leftrightarrow x>0$$

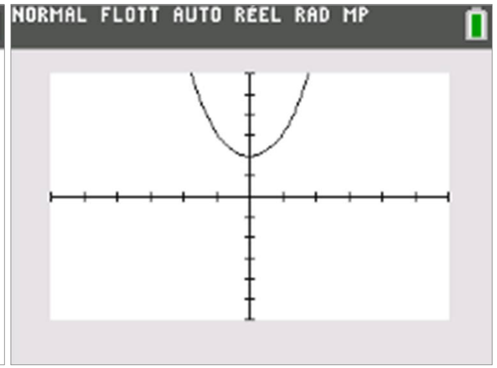
Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient le tableau de variation :

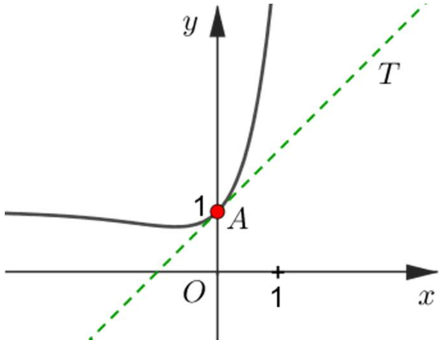
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$\searrow$	2	$\nearrow$

La **valeur minimale de $f(x)$ est 2, atteinte pour $x=2$ (uniquement)**.





Défi EXP 03 **Dans le plan muni d'un repère orthonormé on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$ et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse nulle :**



Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et T.

Corrigé

$f(x) = e^{2x} - e^x + 1$

Rappels : $(e^x)' = e^x$ et $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$
$f'(x) = 2e^{2x} - e^x + 0$
$f'(x) = 2e^{2x} - e^x$

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse nulle admet pour équation :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
Or,
$f'(0) = 2e^{2(0)} - e^0 = 2 \times 1 - 1 = 1$ et $f(0) = e^{2(0)} - e^0 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
donc on obtient :

$$y = 1(x - 0) + 1$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

La tangente T admet pour équation réduite : $y = x + 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h(x) = f(x) - (x + 1)$.
On a :

$$h(x) = e^{2x} - e^x + 1 - (x + 1) = e^{2x} - e^x - x$$

donc :

$$h'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = (e^x - 1)(2e^x + 1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $2e^x + 1 >$ par conséquent le signe de $h'(x)$ est celui de $e^x - 1$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a $e^x - 1 > 0$:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

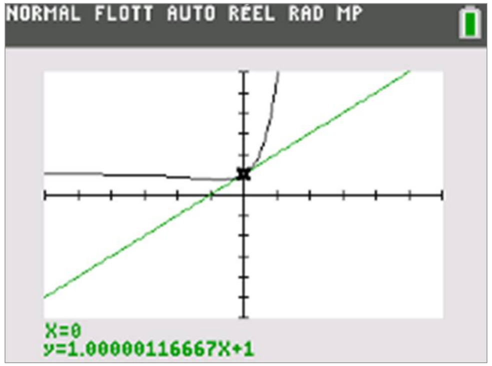
Le signe de $h'(x)$ donne le sens de variation de h.

De plus, $h(0) = e^{2(0)} - e^0 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$, donc on obtient :

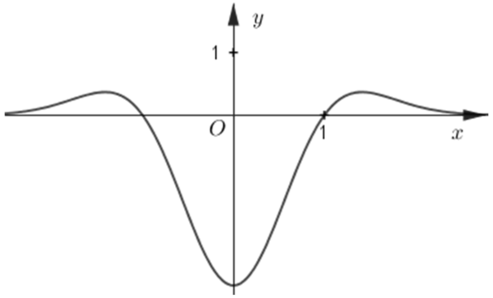
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On déduit de la dernière ligne de ce tableau de variation que le minimum de $h(x)$ est 0 et qu'il est atteint pour $x = 0$ (uniquement), et comme.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - (x + 1)$ donc :

- pour tout $x \neq 0$, $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de T
- $\mathcal{C}$ et T ont un unique point commun : $A(0\,;1)$



Défi EXP 04 Dans le plan muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2-1}}$



Quelles sont les valeurs maximales et minimales de $f(x)$ et pour quelle(s) valeur(s) de x sont-elles atteintes ?

Corrigé

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2-1}}$$

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2-1} - 2xe^{x^2-1}(x^2-1)}{\left(e^{x^2-1}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2-1}(2x - 2x(x^2-1))}{e^{x^2-1} \times e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2x^3 + 2x}{e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{e^{x^2-1}}$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2-1} > 0$
donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $2x(2 - x^2)$.

$2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{2} \Leftrightarrow x = 0$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

$$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{(-\sqrt{2})^2 - 1}{e^{(-\sqrt{2})^2-1}} = \frac{2-1}{e^{2-1}} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{e^{0^2-1}} = \frac{-1}{e^{-1}} = -1 \times e^1 = -e$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1}{e^{(\sqrt{2})^2-1}} = \frac{2-1}{e^{2-1}} = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

Le tableau de variation montre que **la valeur maximale de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{e}$, atteinte pour $x = -\sqrt{2}$ et pour $x = \sqrt{2}$.**

Ce tableau de variation ne permet pas de savoir si f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, une étude supplémentaire est donc nécessaire :

- si $x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[$
  $x^2 - 1 \geqslant 0$ (signe de a à l'extérieur des racines) et comme pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ on en déduit : $\dfrac{x^2-1}{e^{x^2-1}} > 0$, d'où : $f(x) > -e$.
- si $x \in \left]-1; 1\right[$
  Le tableau de variation montre que : $-e \leqslant f(x)$

Résumons

Si $x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[$ alors : $-e < f(x)$ et si $x \in \left]-1; 1\right[$ alors on a : $-e \leqslant f(x)$, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-e \leqslant f(x)$.
Or, $-e$ n'est atteint que pour $x = 0$ donc : **la valeur minimale de $f(x)$ est $(-e)$ et elle est atteinte pour $x = 0$ uniquement**.

Défi EXP 05 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :
• $e^{2x-1} \times e^{-x+6} = 1$ • $e^{2x} \times e^{-x+7} = e$

Corrigé

• $e^{2x-1} \times e^{-x+6} = 1$
On a les équivalences :
$$\begin{aligned} & e^{2x-1} \times e^{-x+6} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & e^{(2x-1)+(-x+6)} = 1 \quad (rappel:\ e^a \times e^b = e^{a+b}) \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x-1-x+6} = e^0 \quad (rappel:\ e^0 = 1) \\ \Leftrightarrow\ & e^{x+5} = e^0 \\ \Leftrightarrow\ & x+5 = 0 \quad (rappel: e^a = e^b \Leftrightarrow a = b) \\ \Leftrightarrow\ & x = -5 \end{aligned}$$
L'équation de départ admet pour unique solution : -5.

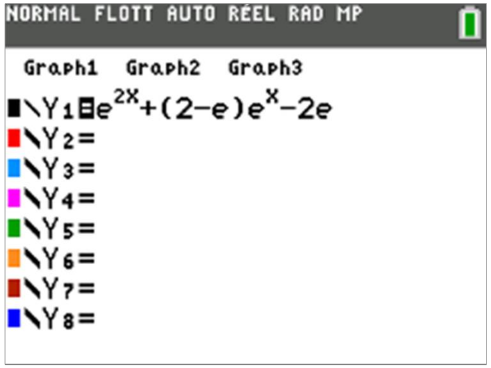
• $e^{2x} \times e^{-x+7} = e$
On a les équivalences :
$$\begin{aligned} & e^{2x} \times e^{-x+7} = e \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x+(-x+7)} = e \quad (rappel: e^a \times e^b = e^{a+b}) \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x-x+7} = e \\ \Leftrightarrow\ & e^{x+7} = e^1 \quad (rappel:\ e^1 = e) \\ \Leftrightarrow\ & x+7 = 1 \quad (rappel:\ e^a = e^b \Leftrightarrow a = b) \\ \Leftrightarrow\ & x = 1-7 \\ \Leftrightarrow\ & x = -6 \end{aligned}$$
L'équation de départ admet pour unique solution : -6.

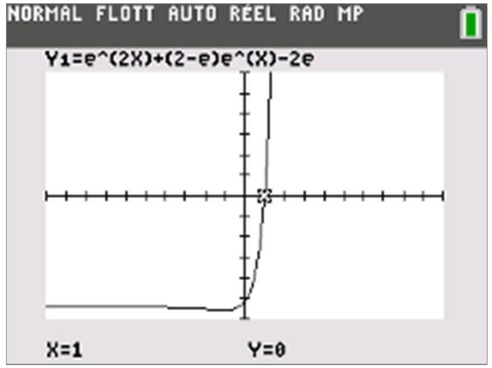
Défi EXP 06 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} + (2-e)e^x = 2e$.

Corrigé
On a les équivalences :
$$\begin{aligned} & e^{2x} + (2-e)e^x = 2e \\ \Leftrightarrow\ & e^{2x} + (2-e)e^x - 2e = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (e^x)^2 + (2-e)e^x - 2e = 0 \end{aligned}$$
Posons $X = e^x$, l'équation précédente devient : $X^2 + (2-e)X - 2e = 0$.
$X^2 + (2-e)X - 2e$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = 2-e$ et $c = -2e$, de discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (2-e)^2 - 4(1)(-2e) = 4 - 4e + e^2 + 8e$$
$$= e^2 + 4e + 4 = (e)^2 + 2(e)(2) + (2)^2 = (e+2)^2$$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :
$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2-e)-(e+2)}{2(1)} = \frac{-2+e-e-2}{2} = -2$$
$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2-e)+(e+2)}{2(1)} = \frac{-2+e+e+2}{2} = e$$
On a donc : $X = -2$ ou $X = e$, or $X = e^x$, donc :
$$e^x = -2 \text{ ou } e^x = e$$

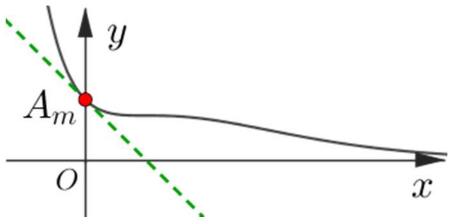
$e^x = -2$	$e^x = e$
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$	$e^x = e$
donc $e^x = -2$ n'a pas	$\Leftrightarrow e^x = e^1$
de solution dans $\mathbb{R}$	$\Leftrightarrow x = 1$

L'équation de départ admet donc une seule solution : 1.





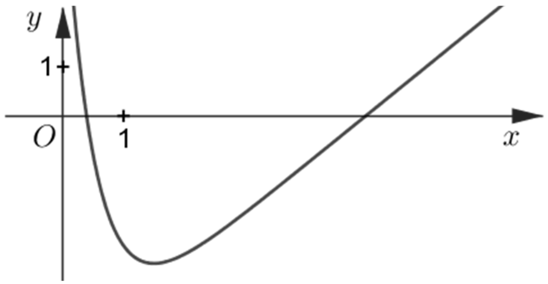
Défi EXP 07 Dans le plan muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (x^2+m)e^{-x}$, où m est un paramètre réel et on note T_m la tangente à $\mathcal{C}_m$ au point A_m de $\mathcal{C}$ d'abscisse nulle :



Existe-t-il un point du plan, de coordonnées indépendantes de m, par lequel passent toutes les droites T_m ?
Dans l'affirmative préciser les coordonnées d'un tel point.

[corrigé en classe]

Défi EXP 08 Pour tout réel x, on pose : $f(x) = 0{,}5e^{-2x+3} + x - 5$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.



Déterminer la valeur minimale de $f(x)$ et préciser la valeur de x permettant de l'atteindre.

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0{,}5e^{-2x+3} + x - 5$

$rappel : (ku)' = k \times u' \qquad \left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$

$f'(x) = 0{,}5 \times (-2e^{-2x+3}) + 1$

$f'(x) = -e^{-2x+3} + 1$

Cherchons pour quelles valeurs de $x$on a : $-e^{-2x+3} + 1 > 0$

$-e^{-2x+3} + 1 > 0 \Leftrightarrow -e^{-2x+3} > -1 \Leftrightarrow +e^{-2x+3} < +1 \Leftrightarrow e^{-2x+3} < e^0$

$\Leftrightarrow -2x + 3 < 0 \Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow +2x > +3 \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$

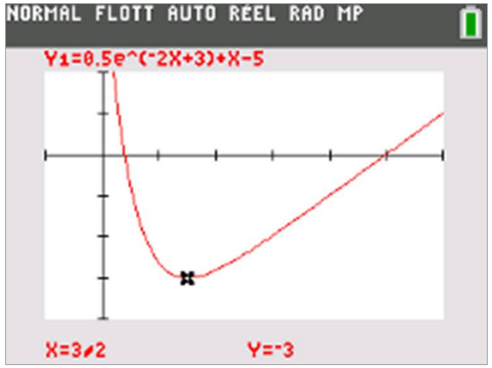
$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0{,}5e^{-2\left(\frac{3}{2}\right)+3} + \dfrac{3}{2} - 5 = \dfrac{1}{2}e^0 + \dfrac{3}{2} - 5 = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{3}{2} - 5 = -3$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.
On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$\searrow$	-3	$\nearrow$

Le tableau de variation de f montre que la valeur minimale de $f(x)$ est -3, atteinte pour $x = \frac{3}{2}$ uniquement.

On dit aussi que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -3, atteint pour $\frac{3}{2}$ uniquement.



Défi EXP 09 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^{y+1} = e - 1 \end{cases}$.

Corrigé

$$\begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^{y+1} = e - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e^y \times e^1 = e - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \times e^y = 1 \\ e^x - e \times e^y = e - 1 \end{cases}$$

Posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, le système devient : $\begin{cases} X \times Y = 1 \\ X - e \times Y = e - 1 \end{cases}$

La première ligne est équivalente à : $Y = \frac{1}{X}$, en remplaçant dans la deuxième :

$$X - e \times \frac{1}{X} = e - 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{X} - \frac{e}{X} = e - 1 \Leftrightarrow \frac{X^2 - e}{X} = e - 1$$

$$\Leftrightarrow X^2 - e = (e-1)X \text{ et } X \neq 0 \Leftrightarrow X^2 - (e-1)X - e = 0 \text{ et } X \neq 0$$

$X^2 - (e-1)X - e$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -e + 1$ et $c = -e$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1-e)^2 - 4(1)(-e) = 1 - 2e + e^2 + 4e = e^2 + 2e + 1 = (e+1)^2$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - (e-1)X - e$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e - 1 - (e+1)}{2(1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e - 1 + (e+1)}{2(1)} = \frac{2e}{2} = e$$

on obtient donc : $X = -1$ ou $X = e$.

Plus simple : somme des coefficients =1 …

Or $X = -1$ s'écrit $e^x = -1$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ cette équation n'a pas de solution réelle, et $X = e$ s'écrit $e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$.

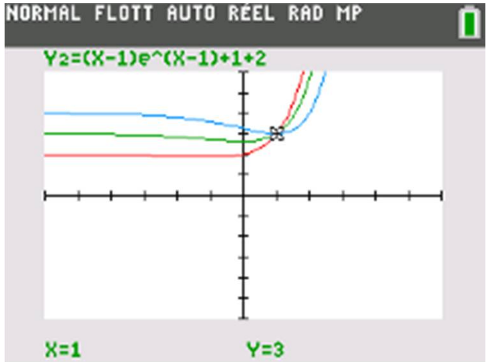
Or, $Y = \frac{1}{X}$ donc $Y = \frac{1}{e} = e^{-1}$, puis : $e^y = e^{-1} \Leftrightarrow y = -1$

Le système admet un unique couple solution : $(\mathbf{1}, \mathbf{-1})$.

Défi EXP 10 $\forall m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_m(x) = (x-m)e^{x-1} + m + 2$.
On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthogonal du plan.
Existe-t-il un point A du plan de coordonnées indépendantes de m appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ce point.

Corrigé

Visualisons sur l'écran de la calculatrice les courbes C_0, C_1 et C_2 :



Elles semblent toutes les trois passer par le point $(1;3)$.

Soit $A(1;3)$.

• Soit $m \in \mathbb{R}$, montrons que : $A \in \mathcal{C}_m$

$$f_m(x_A) = f_m(1) = (1-m)e^{1-1} + m + 2 = (1-m)e^0 + m + 2$$
$$= (1-m) \times 1 + m + 2 = 1 - m + m + 2 = 3 = y_A$$

On a : $f_m(x_A) = y_A$ ce qui prouve que $A \in \mathcal{C}_m$

Il existe donc au moins un point du plan de coordonnées indépendantes de m appartenant à toutes les courbles $\mathcal{C}_m$, $m \in \mathbb{R}$: $A(1\,;3)$.

• Soit B un point appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$: on va montrer que $B = A$.

On a en particulier $B \in \mathcal{C}_0$ et $B \in \mathcal{C}_1$: $f_0(x_B) = y_B$ et $f_1(x_B) = y_B$ d'où $f_0(x_B) = f_1(x_B)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_0(x) = xe^{x-1} + 2$ et $f_1(x) = (x-1)e^{x-1} + 3$.

D'où : $f_0(x_B) = x_B e^{x_B - 1} + 2$ et $f_1(x_B) = (x_B - 1)e^{x_B-1} + 3$, d'où :

$$x_B e^{x_B-1} + 2 = (x_B - 1)e^{x_B-1} + 3 \Leftrightarrow x_B e^{x_B-1} + 2 = x_B e^{x_B-1} - e^{x_B-1} + 3$$
$$\Leftrightarrow x_B e^{x_B-1} - x_B e^{x_B-1} + e^{x_B-1} = 3 - 2 \Leftrightarrow e^{x_B-1} = 1 \Leftrightarrow e^{x_B-1} = e^0$$
$$\Leftrightarrow x_B - 1 = 0 \Leftrightarrow x_B = 1$$

Calculons y_B :

$$y_B = f_m(x_B) = f_m(1) = (1-m)e^{1-1} + m + 2 = (1-m)e^0 + m + 2$$
$$= (1-m) \times 1 + m + 2 = 1 - m + m + 2 = 3$$

On a donc $x_B = x_A = 1$ et $y_B = y_A = 3$ donc $B = A$.

L'ensemble des points appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ ne contient que A.

Conclusion

Il existe un et un seul point du plan de coordonnées indépendantes de m et appartenant à toutes les courbes $\mathcal{C}_m$: $\boldsymbol{A(1\,;3)}$.

Défi EXP 11 Démontrer que, pour tout réel x, on a les égalités :

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)$ • $\dfrac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^{2x}} = 1 - 4e^{-2x}$

Corrigé

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)$?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Développons le membre de droite (méthode de l'un des membres vers l'autre) :

$$(e^x - 3)(e^x + 1)$$
$$= (e^x)^2 + e^x - 3e^x - 3$$
$$= e^{x \times 2} - 2e^x - 3$$
$$= e^{2x} - 2e^x - 3$$

On obtient finalement le membre de gauche.

Conclusion : $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} - 2e^x - 3 = (e^x - 3)(e^x + 1)}$.

• $\dfrac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^{2x}} = 1 - 4e^{-2x}$?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Développons le membre de gauche (méthode de l'un des membres vers l'autre) :

$$\frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^{2x}}$$
$$= \frac{(e^x)^2 + 2e^x - 2e^x - 4}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}}$$
$$= \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}}$$
$$= 1 - 4 \times e^{-2x}$$
$$= 1 - 4e^{-2x}$$

On obtient finalement le membre de droite.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(e^x-2)(e^x+2)}{e^{2x}} = 1 - 4e^{-2x}}$$

Défi EXP 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

- $e^{x-1}=\sqrt{e^{-x+2}}$
- $\dfrac{e^{3x-2}}{e^5}=(e^{-x+5})^{-2}$

Corrigé

• On a les équivalences :

$$e^{x-1}=\sqrt{e^{-x+2}} \Leftrightarrow e^{x-1}=(e^{-x+2})^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^{x-1}=e^{\frac{1}{2}(-x+2)}$$
$$\Leftrightarrow e^{x-1}=e^{-\frac{1}{2}x+1} \Leftrightarrow x-1=-\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{2}x=1+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x=2 \Leftrightarrow x=2\times\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

L'équation de départ admet pour unique solution : $\frac{4}{3}$.

• On a les équivalences :

$$\frac{e^{3x-2}}{e^5}=(e^{-x+5})^{-2} \Leftrightarrow e^{3x-2}\times e^{-5}=e^{-2(-x+5)} \Leftrightarrow e^{3x-2+(-5)}=e^{-2(-x+5)}$$
$$\Leftrightarrow e^{3x-7}=e^{2x-10} \Leftrightarrow 3x-7=2x-10 \Leftrightarrow 3x-2x=-10+7 \Leftrightarrow x=-3$$

L'équation de départ admet pour unique solution : -3 .

Défi EXP 13 Démontrer que, pour tout réel a et tout réel x, on a :

$$\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$$

Corrigé

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$.

Rappel Pour démontrer que $E=F$ on peut partir de l'un des deux membres puis effectuer des calculs pour finalement obtenir l'autre membre.

$$\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\frac{(e^{ax}-e^{-ax})\times e^{ax}}{(e^{ax}+e^{-ax})\times e^{ax}}=\frac{(e^{ax})^2-e^{-ax}\times e^{ax}}{(e^{ax})^2+e^{-ax}\times e^{ax}}=\frac{e^{2ax}-e^{-ax+ax}}{e^{2ax}+e^{-ax+ax}}$$
$$=\frac{e^{2ax}-e^0}{e^{2ax}+e^0}=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$$

On a donc bien, pour tout $a\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R},\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R},\boldsymbol{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}$$

Autre méthode (ici très lourde) : calcul de la différence

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

Rappel Pour démontrer que $E=F$ on peut montrer que la différence $E-F$ est nulle : c'est la méthode de la différence.

$$\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}-\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$$
$$=\frac{(e^{ax}-e^{-ax})(e^{2ax}+1)}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}-\frac{(e^{2ax}-1)(e^{ax}+e^{-ax})}{(e^{2ax}+1)(e^{ax}+e^{-ax})}$$
$$=\frac{(e^{ax}-e^{-ax})(e^{2ax}+1)-(e^{2ax}-1)(e^{ax}+e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}$$
$$=\frac{e^{ax+2ax}+e^{ax}-e^{-ax+2ax}-e^{-ax}-(e^{2ax+ax}+e^{2ax-ax}-e^{ax}-e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}$$
$$=\frac{e^{3ax}+e^{ax}-e^{ax}-e^{-ax}-(e^{3ax}+e^{ax}-e^{ax}-e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}$$
$$=\frac{e^{3ax}-e^{-ax}-e^{3ax}+e^{-ax}}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}$$
$$=\frac{0}{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{2ax}+1)}$$
$$=0$$

On a donc :

$$\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}-\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}=0$$

autrement dit :

$$\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$$

On a donc bien, pour tout $a\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R},\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R},\boldsymbol{\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}$$

Défi EXP 14 Soit $k\in\mathbb{R}$, on note (E_k) l'équation d'inconnue réelle x : $e^{x-k}+e^{k-x}=2$. Exprimer en fonction de k la (ou les) solution(s) de (E_k).

Corrigé

On a les équivalences :

$$e^{x-k}+e^{k-x}=2 \Leftrightarrow e^{x-k}\left(e^{x-k}+e^{k-x}\right)=e^{x-k}\times 2$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{x-k}\right)^2+e^0=2e^{x-k} \Leftrightarrow \left(e^{x-k}\right)^2-2e^{x-k}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x-k}\right)^2 - 2\left(e^{x-k}\right)(1) + (1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{x-k} - 1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{x-k} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-k} = 1 \Leftrightarrow e^{x-k} = e^0 \Leftrightarrow x - k = 0$$
$$\Leftrightarrow x = k$$

L'équation de départ admet une seule solution : k.

Défi EXP 15 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{4x} - (1 + e^2)e^{2x} + e^2 = 0$.

Corrigé

On a l'équivalence :

$$e^{4x} - (1 + e^2)e^{2x} + e^2 = 0 \Leftrightarrow (e^{2x})^2 - (1 + e^2)e^{2x} + e^2 = 0$$

On pose $X = e^{2x}$, l'équation devient : $X^2 - (1 + e^2)X + e^2 = 0$.

$X^2 - (1 + e^2)X + e^2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -(1 + e^2)$, $c = e^2$,de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-(1 + e^2)\right)^2 - 4(1)(e^2) = (1 + e^2)^2 - 4e^2$$
$$= 1 + 2e^2 + e^4 - 4e^2 = 1 - 2e^2 + e^4 = 1^2 - 2(1)(e^2) + (e^2)^2$$
$$= (1 - e^2)^2$$

$\Delta > 0$ donc l'expression $X^2 - (1 + e^2)X + e^2$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + e^2 - (1 - e^2)}{2(1)} = \frac{2e^2}{2} = e^2$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + e^2 + (1 - e^2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

On obtient $X = e^2$ ou $X = 1$, or $X = e^{2x}$, donc : $e^{2x} = e^2$ ou $e^{2x} = 1$.

On a d'une part : $e^{2x} = e^2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

et d'autre part : $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

L'équation de départ admet pour unique solution : $\mathbf{0}$, autrement dit $S = \{\mathbf{0}\}$.

Défi EXP 16 Soit $k \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :

$$e^x - k^2e^{-x} = 1 - k^2$$

Corrigé

On a les équivalences :

$$e^{2x} - k^2 = (1 - k^2)e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 + (k^2 - 1)e^x - k^2 = 0$$

En posant $X = e^x$, l'équation devient : $X^2 + (k^2 - 1)X - k^2 = 0$.

$X^2 + (k^2 - 1)X - k^2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = k^2 - 1$ et $c = -k^2$, de discriminant :

$$\Delta = (k^2 - 1)^2 - 4(1)(-k^2) = k^4 - 2k^2 + 1 + 4k^2 = (k^2 + 1)^2$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 + (k^2 - 1)X - k^2$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-k^2 + 1 - (k^2 + 1)}{2(1)} = \frac{-2k^2}{2} = -k^2$$
$$X_2 = \frac{-k^2 + 1 + (k^2 + 1)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Or, $X = e^x$ donc :

$$e^x = -k^2 \ ou \ e^x = 1$$

$-k^2 \leqslant 0$	$\Leftrightarrow e^x = e^0$
or, $\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x > 0$	$\Leftrightarrow x = 0$
donc $e^x = -k^2$ n'admet	
pas de solution réelle	

L'équation de départ admet une seule solution : $\mathbf{0}$, autrement dit $S = \{\mathbf{0}\}$.

Défi EXP 17 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} = (1 + e^x)(1 + e^{-x+5})$.

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} = 1 + e^x + e^{2x}(1 + e^x) = (1 + e^x)(1 + e^{2x})$$

Donc :

$$1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} = (1 + e^x)(1 + e^{-x+5})$$
$$\Leftrightarrow (1 + e^x)(1 + e^{2x}) = (1 + e^x)(1 + e^{-x+5})$$
$$\Leftrightarrow (1 + e^x)(1 + e^{2x}) - (1 + e^x)(1 + e^{-x+5}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + e^x)[(1 + e^{2x} - (1 + e^{-x+5})] = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + e^x)(1 + e^{2x} - 1 - e^{-x+5}) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + e^x)(e^{2x} - e^{-x+5}) = 0$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $1 + e^x \neq 0$ par conséquent :

$$(1 + e^x)(e^{2x} - e^{-x+5}) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^{-x+5} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{-x+5}$$
$$\Leftrightarrow 2x = -x + 5 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Finalement : $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

Défi EXP 18 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(e^{2x-1})^{-3} < (e^5 \times e^x)^4$.

Corrigé

On a les équivalences :

$(e^{2x-1})^{-3} < (e^5 \times e^x)^4 \Leftrightarrow (e^{2x-1})^{-3} < (e^{5+x})^4 \Leftrightarrow e^{(2x-1)\times(-3)} < e^{(5+x)\times 4}$

$\Leftrightarrow e^{-6x+3} < e^{20+4x} \Leftrightarrow -6x + 3 < 20 + 4x \Leftrightarrow 3 - 20 < 4x + 6x$

$\Leftrightarrow -\frac{17}{10} < x$ donc : $S = \left]-\frac{17}{10}\ ;\ +\infty\right[$.

Défi EXP 19 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{e}\times e^{-2}\right)^4 \leqslant \left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}}\right)^{-1}$$

Corrigé

On a les équivalences :

$$\left(\sqrt{e}\times e^{-2}\right)^4 \leqslant \left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{2}}\times e^{-2}\right)^4 \leqslant \left(e^{2x}\times e^{+x}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{2}+(-2)}\right)^4 \leqslant \left(e^{2x+x}\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^4 \leqslant \left(e^{3x}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}\times 4} \leqslant e^{3x\times(-1)} \Leftrightarrow e^{-6} \leqslant e^{-3x} \Leftrightarrow -6 \leqslant -3x \Leftrightarrow \frac{-6}{-3} \geqslant x \Leftrightarrow 2 \geqslant x$$

Conclusion : $\boldsymbol{S =]-\infty;2]}$.

Défi EXP 20 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^x - 13e^{-x} + 12 = 0$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$e^x - 13e^{-x} + 12 = 0 \Leftrightarrow e^x \times \left(e^x - 13e^{-x} + 12\right) = e^x \times 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 13e^x e^{-x} + 12e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 12e^x - 13 = 0$$

En posant $X = e^x$, l'équation devient :

$$X^2 + 12X - 13 = 0 \Leftrightarrow (X)^2 + 2(X)(6) + (6)^2 - 36 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow (X+6)^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (X+6)^2 - 7^2 = 0 \Leftrightarrow (X+6+7)(X+6-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (X+13)(X-1) = 0 \Leftrightarrow X + 13 = 0 \ ou \ X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = -13 \ ou \ X = 1$$

Or $X = e^x$ donc on obtient :

$$e^x = -13 \quad ou \quad e^x = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$	$\Leftrightarrow e^x = e^0$
donc $e^x = -13$ n'a pas	$\Leftrightarrow e = 0$
de solution dans $\mathbb{R}$	

L'équation de départ admet pour unique solution : 0, autrement dit : $S = \{0\}$.

Défi EXP 21 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} + e - e^{x+1} - e^x \leqslant 0$

Corrigé

• cherchons une factorisation du membre de gauche

Méthode 1 (astucieuse mais rarement applicable dans les exercices)

$$e^{2x} + e - e^{x+1} - e^x \leqslant 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + e - e^x \times e^1 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x \times 1 + 1 \times e - e^x \times e \leqslant 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) + (1 - e^x)\times e \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow e^x(e^x - 1) - (e^x - 1)\times e \leqslant 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - e) \leqslant 0$$

Méthode 2

$$e^{2x} + e - e^{x+1} - e^x \leqslant 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e - e^x \times e - 1 \times e^x \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - (e+1)e^x + e \leqslant 0$$

En posant $X = e^x$, on obtient : $X^2 - (e+1)X + e \leqslant 0$.

$X^2 - (e+1)X + e$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -(e+1)$, $c = e$, de déterminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-(e+1)\right)^2 - 4(1)(e) = (e+1)^2 - 4e = e^2 + 2e + 1 - 4e$$

$$= e^2 - 2e + 1 = (e-1)^2$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - (e+1)X + e$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e+1-(e-1)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e+1+(e-1)}{2(1)} = \frac{2e}{2} = e$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)(cours)$

donc : $\forall X \in \mathbb{R}$, $X^2 - (e+1)X + e = (X-1)(X-e)$.

Or $X = e^x$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^x)^2 - (e+1)e^x + e = (e^x - 1)(e^x - e)$.

L'inéquation de départ s'écrit donc : $(e^x - 1)(e^x - e) \leqslant 0$.

• dressons de tableau de signes de $(e^x - 1)(e^x - e)$

cherchons pour quelles valeurs de x on a : $e^x - 1 > 0$ (la «tradition »)

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

cherchons pour quelles valeurs de x on a : $e^x - e > 0$ (la «tradition»)

$$e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - e$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)(e^x - e)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La dernière ligne montre que $(e^x - 1)(e^x - e) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$.

Conclusion

L'inéquation de départ admet pour ensemble des solutions : $\boldsymbol{S = [0;1]}$.